

eBook

PRINSIP & PERANCANGAN LOGIKA

Penyusun :

1. Imam Purwanto, S.Kom, MMSI
2. Ega Hegarini, S.Kom., MM
3. Rifki Amalia, S.Kom., MMSI
4. Arie Kusumawati, S.Kom

**Fakultas Teknologi Industri
Universitas Gunadarma
2013**

PRINSIP & PERANCANGAN LOGIKA

Minggu 4 & 5

Aljabar Boolean

Ekspresi Boolean

- Misalkan $(B, +, \cdot, ')$ adalah sebuah aljabar Boolean. Suatu ekspresi Boolean dalam $(B, +, \cdot, ')$ adalah:
 - (i) setiap elemen di dalam B ,
 - (ii) setiap peubah,
 - (iii) jika e_1 dan e_2 adalah ekspresi Boolean, maka $e_1 + e_2$, $e_1 \cdot e_2$, e_1' adalah ekspresi Boolean

Contoh: 0

1

a

b

$a + b$

$a \cdot b$

$a' \cdot (b + c)$

$a \cdot b' + a \cdot b \cdot c' + b'$, dan sebagainya

Mengevaluasi Ekspresi Boolean

- Contoh: $a' \cdot (b + c)$

jika $a = 0$, $b = 1$, dan $c = 0$, maka hasil evaluasi ekspresi:

$$0' \cdot (1 + 0) = 1 \cdot 1 = 1$$

- Dua ekspresi Boolean dikatakan **ekivalen** (dilambangkan dengan '=') jika keduanya mempunyai nilai yang sama untuk setiap pemberian nilai-nilai kepada n peubah.

Contoh:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Contoh. Perhatikan bahwa $a + a'b = a + b$.

Penyelesaian:

a	b	a'	$a'b$	$a + a'b$	$a + b$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

- Perjanjian: tanda titik (\cdot) dapat dihilangkan dari penulisan ekspresi Boolean, kecuali jika ada penekanan:

(i) $a(b + c) = ab + ac$

(ii) $a + bc = (a + b)(a + c)$

(iii) $a \cdot 0$, bukan $a0$

Prinsip Dualitas

- Misalkan S adalah kesamaan (*identity*) di dalam aljabar Boolean yang melibatkan operator $+$, \cdot , dan komplemen, maka jika pernyataan S^* diperoleh dengan cara mengganti

\cdot dengan $+$

$+$ dengan \cdot

0 dengan 1

1 dengan 0

dan membiarkan operator komplemen tetap apa adanya, maka kesamaan S^* juga benar. S^* disebut sebagai *dual* dari S .

Contoh.

(i) $(a \cdot 1)(0 + a') = 0$ dualnya $(a + 0) + (1 \cdot a') = 1$

(ii) $a(a' + b) = ab$ dualnya $a + a'b = a + b$

Hukum-hukum Aljabar Boolean

1. Hukum identitas: (i) $a + 0 = a$ (ii) $a \cdot 1 = a$	2. Hukum idempoten: (i) $a + a = a$ (ii) $a \cdot a = a$
3. Hukum komplemen: (i) $a + a' = 1$ (ii) $aa' = 0$	4. Hukum dominansi: (i) $a \cdot 0 = 0$ (ii) $a + 1 = 1$
5. Hukum involusi: (i) $(a')' = a$	6. Hukum penyerapan: (i) $a + ab = a$ (ii) $a(a + b) = a$
7. Hukum komutatif: (i) $a + b = b + a$ (ii) $ab = ba$	8. Hukum asosiatif: (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ii) $a (b c) = (a b) c$
9. Hukum distributif: (i) $a + (b c) = (a + b) (a + c)$ (ii) $a (b + c) = a b + a c$	10. Hukum De Morgan: (i) $(a + b)' = a' b'$ (ii) $(ab)' = a' + b'$
11. Hukum 0/1 (i) $0' = 1$ (ii) $1' = 0$	

Contoh 7.3. Buktikan (i) $a + a'b = a + b$ dan (ii) $a(a' + b) = ab$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad a + a'b &= (a + ab) + a'b && \text{(Penyerapan)} \\ &= a + (ab + a'b) && \text{(Asosiatif)} \\ &= a + (a + a')b && \text{(Distributif)} \\ &= a + 1 \bullet b && \text{(Komplemen)} \\ &= a + b && \text{(Identitas)} \end{aligned}$$

(ii) adalah dual dari (i)

Fungsi Boolean

- **Fungsi Boolean** (disebut juga fungsi biner) adalah pemetaan dari B^n ke B melalui ekspresi Boolean, kita menuliskannya sebagai

$$f: B^n \rightarrow B$$

yang dalam hal ini B^n adalah himpunan yang beranggotakan pasangan terurut ganda- n (*ordered n -tuple*) di dalam daerah asal B .

- Setiap ekspresi Boolean tidak lain merupakan fungsi Boolean.

- Misalkan sebuah fungsi Boolean adalah

$$f(x, y, z) = xyz + x'y + y'z$$

Fungsi f memetakan nilai-nilai pasangan terurut ganda-3 (x, y, z) ke himpunan $\{0, 1\}$.

Contohnya, $(1, 0, 1)$ yang berarti $x = 1$, $y = 0$, dan $z = 1$

sehingga $f(1, 0, 1) = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1' \cdot 0 + 0' \cdot 1 = 0 + 0 + 1 = 1$.

Contoh. Contoh-contoh fungsi Boolean yang lain:

1. $f(x) = x$

2. $f(x, y) = x'y + xy' + y'$

3. $f(x, y) = x' y'$

4. $f(x, y) = (x + y)'$

5. $f(x, y, z) = xyz'$

- Setiap peubah di dalam fungsi Boolean, termasuk dalam bentuk komplementnya, disebut **literal**.

Contoh: Fungsi $h(x, y, z) = xyz'$ pada contoh di atas terdiri dari 3 buah literal, yaitu x , y , dan z' .

Contoh. Diketahui fungsi Boole $f(x, y, z) = xy z'$, nyatakan h dalam tabel kebenaran.

Penyelesaian:

x	y	z	$f(x, y, z) = xy z'$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Komplemen Fungsi

1. Cara pertama: menggunakan hukum De Morgan
Hukum De Morgan untuk dua buah peubah, x_1 dan x_2 , adalah

Contoh. Misalkan $f(x, y, z) = x(y'z' + yz)$, maka

$$\begin{aligned}f'(x, y, z) &= (x(y'z' + yz))' \\ &= x' + (y'z' + yz)' \\ &= x' + (y'z')' (yz)' \\ &= x' + (y + z) (y' + z')\end{aligned}$$

2. Cara kedua: menggunakan prinsip dualitas.

Tentukan dual dari ekspresi Boolean yang merepresentasikan f , lalu komplementkan setiap literal di dalam dual tersebut.

Contoh. Misalkan $f(x, y, z) = x(y'z' + yz)$, maka

dual dari f : $x + (y' + z')(y + z)$

komplementkan tiap literalnya: $x' + (y + z)(y' + z') = f'$

Jadi, $f'(x, y, z) = x' + (y + z)(y' + z')$

Bentuk Kanonik

- Ada dua macam bentuk kanonik:
 1. Penjumlahan dari hasil kali (*sum-of-product* atau SOP)
 2. Perkalian dari hasil jumlah (*product-of-sum* atau POS)

Contoh: 1. $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz \rightarrow$ SOP

Setiap suku (*term*) disebut *minterm*

$$2. g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z') \\ (x' + y + z')(x' + y' + z) \rightarrow \text{POS}$$

Setiap suku (*term*) disebut *maxterm*

- Setiap *minterm/maxterm* mengandung literal lengkap

		<i>Minterm</i>		<i>Maxterm</i>	
<i>x</i>	<i>y</i>	Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	$x'y'$	m_0	$x + y$	M_0
0	1	$x'y$	m_1	$x + y'$	M_1
1	0	xy'	m_2	$x' + y$	M_2
1	1	xy	m_3	$x' + y'$	M_3

			<i>Minterm</i>		<i>Maxterm</i>	
<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x + y' + z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x + y' + z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x' + y + z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x' + y + z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x' + y' + z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x' + y' + z'$	M_7

Contoh 7.10. Nyatakan tabel kebenaran di bawah ini dalam bentuk kanonik SOP dan POS.

Tabel 7.10

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Penyelesaian:

(a) SOP

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 1 adalah 001, 100, dan 111, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik SOP adalah

$$f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$$

atau (dengan menggunakan lambang *minterm*),

$$f(x, y, z) = m_1 + m_4 + m_7 = \sum (1, 4, 7)$$

(b) POS

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 0 adalah 000, 010, 011, 101, dan 110, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik POS adalah

$$f(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z') \\ (x' + y + z')(x' + y' + z)$$

atau dalam bentuk lain,

$$f(x, y, z) = M_0 M_2 M_3 M_5 M_6 = \prod(0, 2, 3, 5, 6)$$

Contoh 7.11. Nyatakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = x + y'z$ dalam bentuk kanonik SOP dan POS.

Penyelesaian:

(a) SOP

$$\begin{aligned}x &= x(y + y') \\ &= xy + xy' \\ &= xy(z + z') + xy'(z + z') \\ &= xyz + xyz' + xy'z + xy'z'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'z &= y'z(x + x') \\ &= xy'z + x'y'z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Jadi } f(x, y, z) &= x + y'z \\ &= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + xy'z + x'y'z \\ &= x'y'z + xy'z' + xy'z + xyz' + xyz\end{aligned}$$

$$\text{atau } f(x, y, z) = m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \Sigma (1,4,5,6,7)$$

(b) POS

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= x + y'z \\ &= (x + y')(x + z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + y' &= x + y' + zz' \\ &= (x + y' + z)(x + y' + z')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + z &= x + z + yy' \\ &= (x + y + z)(x + y' + z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Jadi, } f(x, y, z) &= (x + y' + z)(x + y' + z')(x + y + z)(x + y' + z) \\ &= (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')\end{aligned}$$

$$\text{atau } f(x, y, z) = M_0M_2M_3 = \prod(0, 2, 3)$$

Konversi Antar Bentuk Kanonik

Misalkan

$$f(x, y, z) = \Sigma (1, 4, 5, 6, 7)$$

dan f' adalah fungsi komplemen dari f ,

$$f'(x, y, z) = \Sigma (0, 2, 3) = m_0 + m_2 + m_3$$

Dengan menggunakan hukum De Morgan, kita dapat memperoleh fungsi f dalam bentuk POS:

$$\begin{aligned} f'(x, y, z) &= (f'(x, y, z))' = (m_0 + m_2 + m_3)' \\ &= m_0' \cdot m_2' \cdot m_3' \\ &= (x'y'z')' (x'y z')' (x'y z)' \\ &= (x + y + z) (x + y' + z) (x + y' + z') \\ &= M_0 M_2 M_3 \\ &= \Pi (0,2,3) \end{aligned}$$

Jadi, $f(x, y, z) = \Sigma (1, 4, 5, 6, 7) = \Pi (0,2,3)$.

Kesimpulan: $m_i' = M_i$

Contoh. Nyatakan

$$f(x, y, z) = \prod (0, 2, 4, 5) \text{ dan}$$

$$g(w, x, y, z) = \Sigma(1, 2, 5, 6, 10, 15)$$

dalam bentuk SOP.

Penyelesaian:

$$f(x, y, z) = \Sigma (1, 3, 6, 7)$$

$$g(w, x, y, z) = \prod (0, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14)$$

Contoh. Carilah bentuk kanonik SOP dan POS dari $f(x, y, z) = y' + xy + x'yz'$

Penyelesaian:

(a) SOP

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= y' + xy + x'yz' \\ &= y' (x + x') (z + z') + xy (z + z') + x'yz' \\ &= (xy' + x'y') (z + z') + xyz + xyz' + x'yz' \\ &= xy'z + xy'z' + x'y'z + x'y'z' + xyz + xyz' + x'yz' \end{aligned}$$

$$\text{atau } f(x, y, z) = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

(b) POS

$$f(x, y, z) = M_3 = x + y' + z'$$

Bentuk Baku

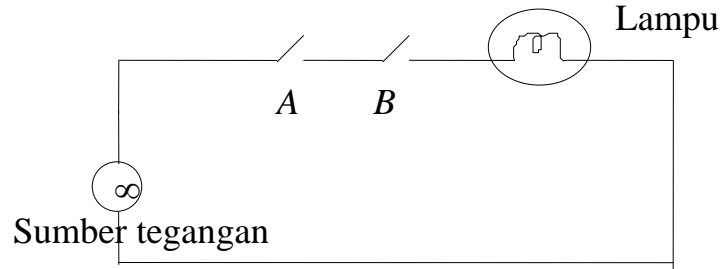
- Tidak harus mengandung literal yang lengkap.
- Contohnya,

$$f(x, y, z) = y' + xy + x'yz \quad (\text{bentuk baku SOP})$$

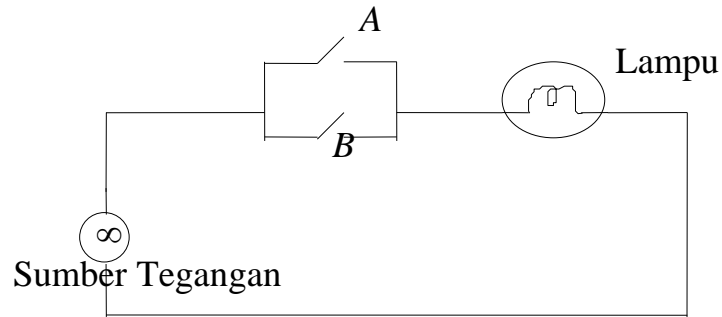
$$f(x, y, z) = x(y' + z)(x' + y + z') \quad (\text{bentuk baku POS})$$

Contoh rangkaian pensaklaran pada rangkaian listrik:

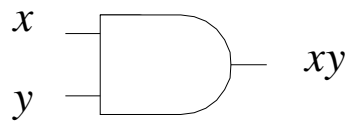
1. Saklar dalam hubungan SERI: logika AND



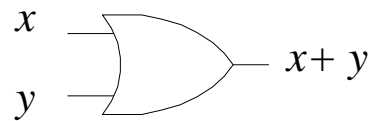
2. Saklar dalam hubungan PARALEL: logika OR



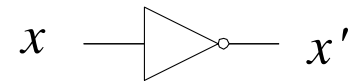
2. Rangkaian Logika



Gerbang AND



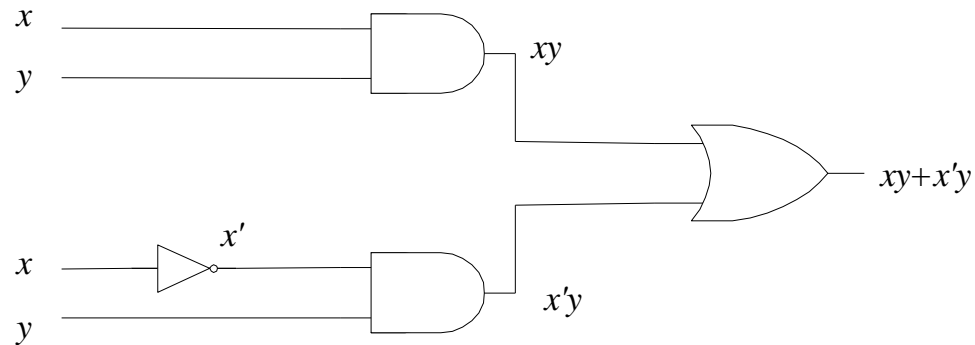
Gerbang OR



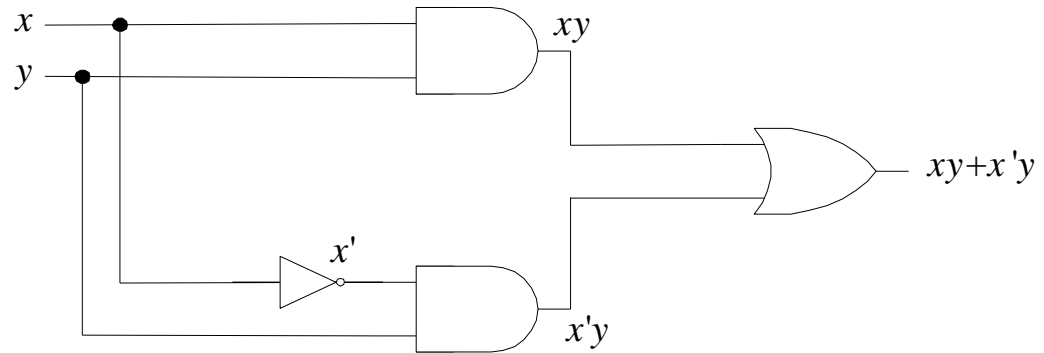
Gerbang NOT (*inverter*)

Contoh. Nyatakan fungsi $f(x, y, z) = xy + x'y$ ke dalam rangkaian logika.

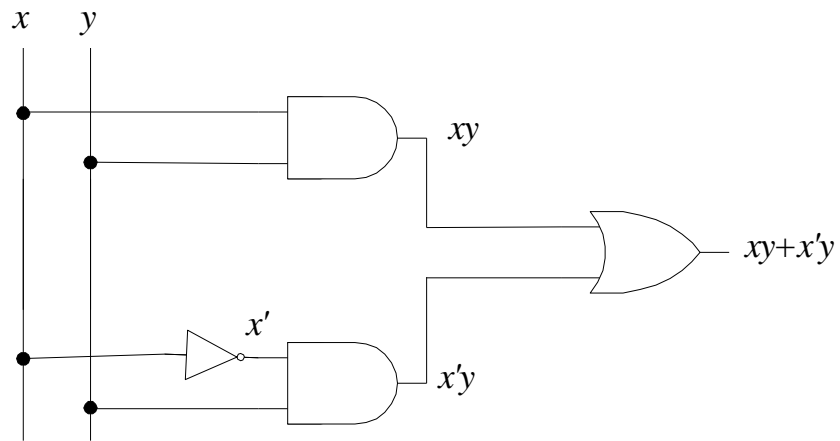
Jawab: (a) Cara pertama



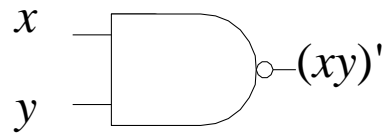
(b) Cara kedua



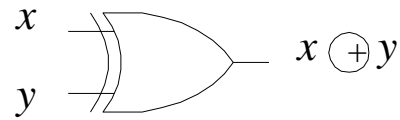
(c) Cara ketiga



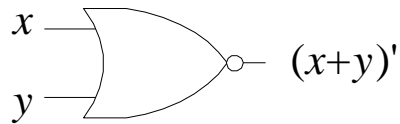
Gerbang turunan



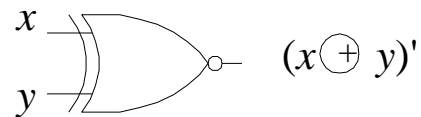
Gerbang NAND



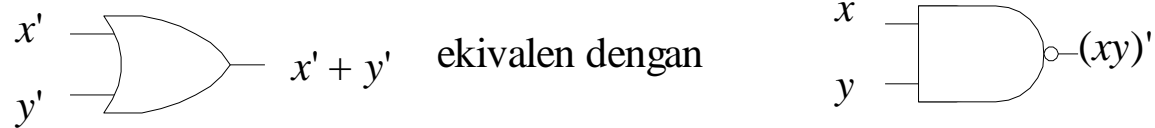
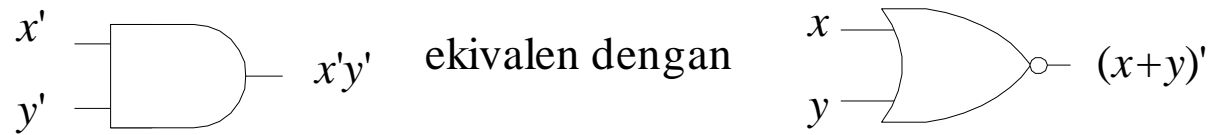
Gerbang XOR



Gerbang NOR



Gerbang XNOR



Penyederhanaan Fungsi Boolean

Contoh. $f(x, y) = x'y + xy' + y'$

disederhanakan menjadi

$$f(x, y) = x' + y'$$

Penyederhanaan fungsi Boolean dapat dilakukan dengan 3 cara:

1. Secara aljabar
2. Menggunakan Peta Karnaugh
3. Menggunakan metode Quine Mc Cluskey (metode Tabulasi)

1. Penyederhanaan Secara Aljabar

Contoh:

$$\begin{aligned} 1. f(x, y) &= x + x'y \\ &= (x + x')(x + y) \\ &= 1 \cdot (x + y) \\ &= x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. f(x, y, z) &= x'y'z + x'yz + xy' \\ &= x'z(y' + y) + xy' \\ &= x'z + xz' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. f(x, y, z) &= xy + x'z + yz = xy + x'z + yz(x + x') \\ &= xy + x'z + xyz + x'yz \\ &= xy(1 + z) + x'z(1 + y) = xy + x'z \end{aligned}$$

2. Peta Karnaugh

a. *Peta Karnaugh dengan dua peubah*

m_0	m_1
m_2	m_3

		y	
		0	1
x	0	$x'y'$	$x'y$
	1	xy'	xy

b. *Peta dengan tiga peubah*

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

		yz			
		00	01	11	10
x	0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
	1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

Contoh. Diberikan tabel kebenaran, gambarkan Peta Karnaugh.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

		yz			
		00	01	11	10
x	0	0	0	0	1
	1	0	0	1	1

b. Peta dengan empat peubah

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
	01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
	11	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$
	10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$

Contoh. Diberikan tabel kebenaran, gambarkan Peta Karnaugh.

w	x	y	z	$f(w, x, y, z)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	1	0	1
	01	0	0	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	0	0

Teknik Minimisasi Fungsi Boolean dengan Peta Karnaugh

1. *Pasangan*: dua buah 1 yang bertetangga

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	0	0	0
	11	0	0	1	1
	10	0	0	0	0

Sebelum disederhanakan: $f(w, x, y, z) = wxyz + wxyz'$

Hasil Penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = wxy$

Bukti secara aljabar:

$$\begin{aligned} f(w, x, y, z) &= wxyz + wxyz' \\ &= wxy(z + z') \\ &= wxy(1) \\ &= wxy \end{aligned}$$

2. *Kuad*: empat buah 1 yang bertetangga

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	0	0	0
	11	1	1	1	1
	10	0	0	0	0

Sebelum disederhanakan: $f(w, x, y, z) = wxy'z' + wxy'z + wxyz + wxyz'$

Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = wx$

Bukti secara aljabar:

$$\begin{aligned} f(w, x, y, z) &= wxy' + wxy \\ &= wx(z' + z) \\ &= wx(1) \\ &= wx \end{aligned}$$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	0	0	0
	11	1	1	1	1
	10	0	0	0	0

Contoh lain:

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	0	0	0
	11	1	1	0	0
	10	1	1	0	0

Sebelum disederhanakan: $f(w, x, y, z) = wxy'z' + wxy'z + wx'y'z' + wx'y'z$

Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = wy'$

3. *Oktet*: delapan buah 1 yang bertetangga

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	0	0	0
	11	1	1	1	1
	10	1	1	1	1

Sebelum disederhanakan: $f(a, b, c, d) = wxy'z' + wxy'z + wxyz + wxyz' + wx'y'z' + wx'y'z + wx'yz + wx'yz'$

Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = w$

Bukti secara aljabar:

$$\begin{aligned} f(w, x, y, z) &= wy' + wy \\ &= w(y' + y) \\ &= w \end{aligned}$$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	0	0	0
	11	1	1	1	1
	10	1	1	1	1

Contoh 5.12. Andaikan suatu tabel kebenaran telah diterjemahkan ke dalam Peta Karnaugh. Sederhanakan fungsi Boolean yang bersesuaian sesederhana mungkin.

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	1	1	1
	01	0	0	0	1
	11	1	1	0	1
	10	1	1	0	1

Jawab: (lihat Peta Karnaugh) $f(w, x, y, z) = wy' + yz' + w'x'z$

Contoh 5.13. Minimisasi fungsi Boolean yang bersesuaian dengan Peta Karnaugh di bawah ini.

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	1	0	0
	11	1	1	1	1
	10	1	1	1	1

Jawab: (lihat Peta Karnaugh) $f(w, x, y, z) = w + xy'z$

Jika penyelesaian Contoh 5.13 adalah seperti di bawah ini:

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	1	0	0
	11	1	1	1	1
	10	1	1	1	1

maka fungsi Boolean hasil penyederhanaan adalah

$$f(w, x, y, z) = w + w'xy'z \quad (\text{jumlah literal} = 5)$$

yang ternyata masih belum sederhana dibandingkan $f(w, x, y, z) = w + xy'z$ (jumlah literal = 4).

Contoh 5.14. (Penggulungan/*rolling*) Sederhanakan fungsi Boolean yang bersesuaian dengan Peta Karnaugh di bawah ini.

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	1	0	0	1
	11	1	0	0	1
	10	0	0	0	0

Jawab: $f(w, x, y, z) = xy'z' + xyz' \implies$ belum sederhana

Penyelesaian yang lebih minimal:

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	1	0	0	1
	11	1	0	0	1
	10	0	0	0	0

$$f(w, x, y, z) = xz' \implies \text{lebih sederhana}$$

Contoh 5.11. Sederhanakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = x'yz + xy'z' + xyz + xyz'$.

Jawab:

Peta Karnaugh untuk fungsi tersebut adalah:

		yz			
		00	01	11	10
x	0			1	
	1	1		1	1

Hasil penyederhanaan: $f(x, y, z) = yz + xz'$

Contoh 5.15: (Kelompok berlebihan) Sederhanakan fungsi Boolean yang bersesuaian dengan Peta Karnaugh di bawah ini.

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	1	0	0
	11	0	1	1	0
	10	0	0	1	0

Jawab: $f(w, x, y, z) = xy'z + wxz + wyz \rightarrow$ masih belum sederhana.

Penyelesaian yang lebih minimal:

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	1	0	0
	11	0	1	1	0
	10	0	0	1	0

$$f(w, x, y, z) = xy'z + wyz \implies \text{lebih sederhana}$$

Contoh 5.16. Sederhanakan fungsi Boolean yang bersesuaian dengan Peta Karnaugh di bawah ini.

		<i>cd</i>			
		00	01	11	10
<i>ab</i>	00	0	0	0	0
	01	0	0	1	0
	11	1	1	1	1
	10	0	1	1	1

Jawab: (lihat Peta Karnaugh di atas) $f(a, b, c, d) = ab + ad + ac + bcd$

Contoh 5.17. Minimisasi fungsi Boolean $f(x, y, z) = x'z + x'y + xy'z + yz$

Jawab:

$$x'z = x'z(y + y') = x'yz + x'y'z$$

$$x'y = x'y(z + z') = x'yz + x'yz'$$

$$yz = yz(x + x') = xyz + x'yz$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x'z + x'y + xy'z + yz \\ &= x'yz + x'y'z + x'yz + x'yz' + xy'z + xyz + x'yz \\ &= x'yz + x'y'z + x'yz' + xyz + xy'z \end{aligned}$$

Peta Karnaugh untuk fungsi tersebut adalah:

		yz			
		00	01	11	10
x	0	0	1	1	1
	1	0	1	1	0

Hasil penyederhanaan: $f(x, y, z) = z + x'yz'$

Peta Karnaugh untuk lima peubah

	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

↑
Garis pencerminan

Contoh 5.21. (Contoh penggunaan Peta 5 peubah) Carilah fungsi sederhana dari $f(v, w, x, y, z) = \Sigma (0, 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 25, 27, 29, 31)$

Jawab:

Peta Karnaugh dari fungsi tersebut adalah:

		xyz							
		00	01	11	10	00	01	11	10
		0	1	1	0	0	1	1	0
vw	00	1			1	1			1
	01		1	1			1	1	
	11		1	1			1	1	
	10		1					1	

Jadi $f(v, w, x, y, z) = wz + v'w'z' + vy'z$

Kondisi *Don't care*

Tabel 5.16

<i>w</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	desimal
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	2
0	0	1	1	3
0	1	0	0	4
0	1	0	1	5
0	1	1	0	6
0	1	1	1	7
1	0	0	0	8
1	0	0	1	9
1	0	1	0	<i>don't care</i>
1	0	1	1	<i>don't care</i>
1	1	0	0	<i>don't care</i>
1	1	0	1	<i>don't care</i>
1	1	1	0	<i>don't care</i>
1	1	1	1	<i>don't care</i>

Contoh 5.25. Diberikan Tabel 5.17. Minimisasi fungsi f sederhana mungkin.

Tabel 5.17

a	b	c	d	$f(a, b, c, d)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	X
1	0	0	1	X
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

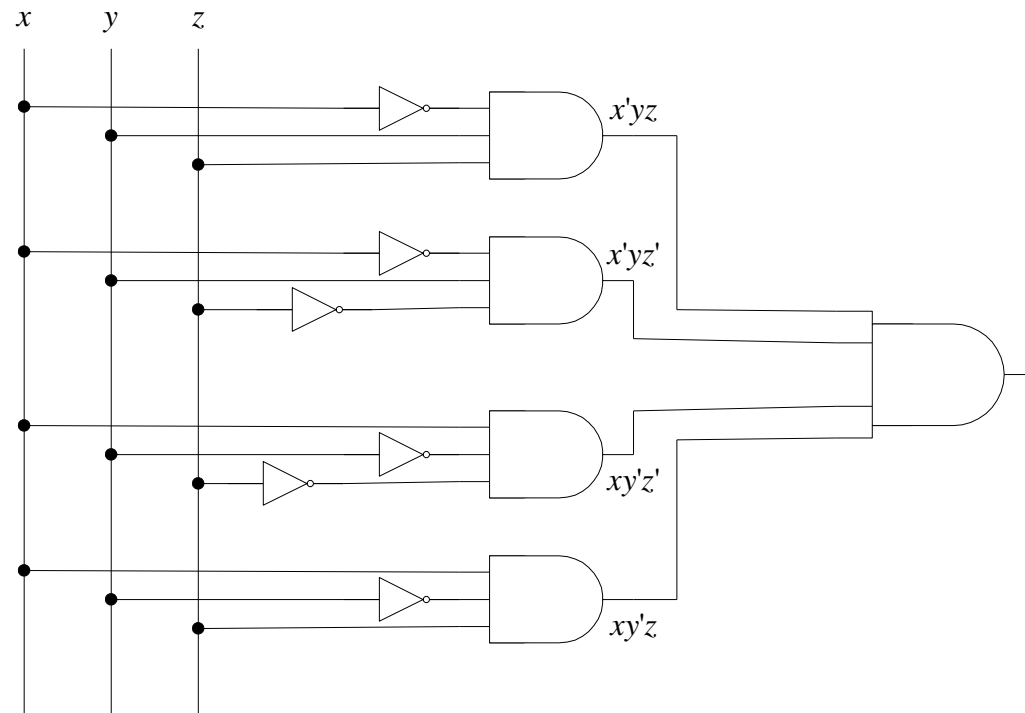
Jawab: Peta Karnaugh dari fungsi tersebut adalah:

	<i>cd</i>			
	00	01	11	10
<i>ab</i> 00	1	0	1	0
01	1	1	1	0
11	X	X	X	X
10	X	0	X	X

Hasil penyederhanaan: $f(a, b, c, d) = bd + c'd' + cd$

Contoh 5.26. Minimisasi fungsi Boolean $f(x, y, z) = x'yz + x'yz' + xy'z' + xy'z$. Gambarkan rangkaian logikanya.

Jawab: Rangkaian logika fungsi $f(x, y, z)$ sebelum diminimisasikan adalah seperti di bawah ini:



Minimisasi dengan Peta Karnaugh adalah sebagai berikut:

		yz			
		00	01	11	10
x	0	0	0	1	1
	1	1	1	0	0

Hasil minimisasi adalah $f(x, y, z) = x'y + xy'$.

Contoh 5.28. Berbagai sistem digital menggunakan kode *binary coded decimal* (BCD). Diberikan Tabel 5.19 untuk konversi BCD ke kode *Excess-3* sebagai berikut:

Tabel 5.19

	Masukan BCD				Keluaran kode <i>Excess-3</i>			
	w	x	y	z	$f_1(w, x, y, z)$	$f_2(w, x, y, z)$	$f_3(w, x, y, z)$	$f_4(w, x, y, z)$
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	1
5	0	1	0	1	1	0	0	0
6	0	1	1	0	1	0	0	1
7	0	1	1	1	1	0	1	0
8	1	0	0	0	1	0	1	1
9	1	0	0	1	1	1	0	0

(a) $f_1(w, x, y, z)$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00				
	01		1	1	1
	11	X	X	X	X
	10	1	1	X	X

$$f_1(w, x, y, z) = w + xz + xy = w + x(y + z)$$

(b) $f_2(w, x, y, z)$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00		1	1	1
	01	1			
	11	X	X	X	X
	10		1	X	X

$$f_2(w, x, y, z) = xy'z' + x'z + x'y = xy'z' + x'(y + z)$$

(c) $f_3(w, x, y, z)$

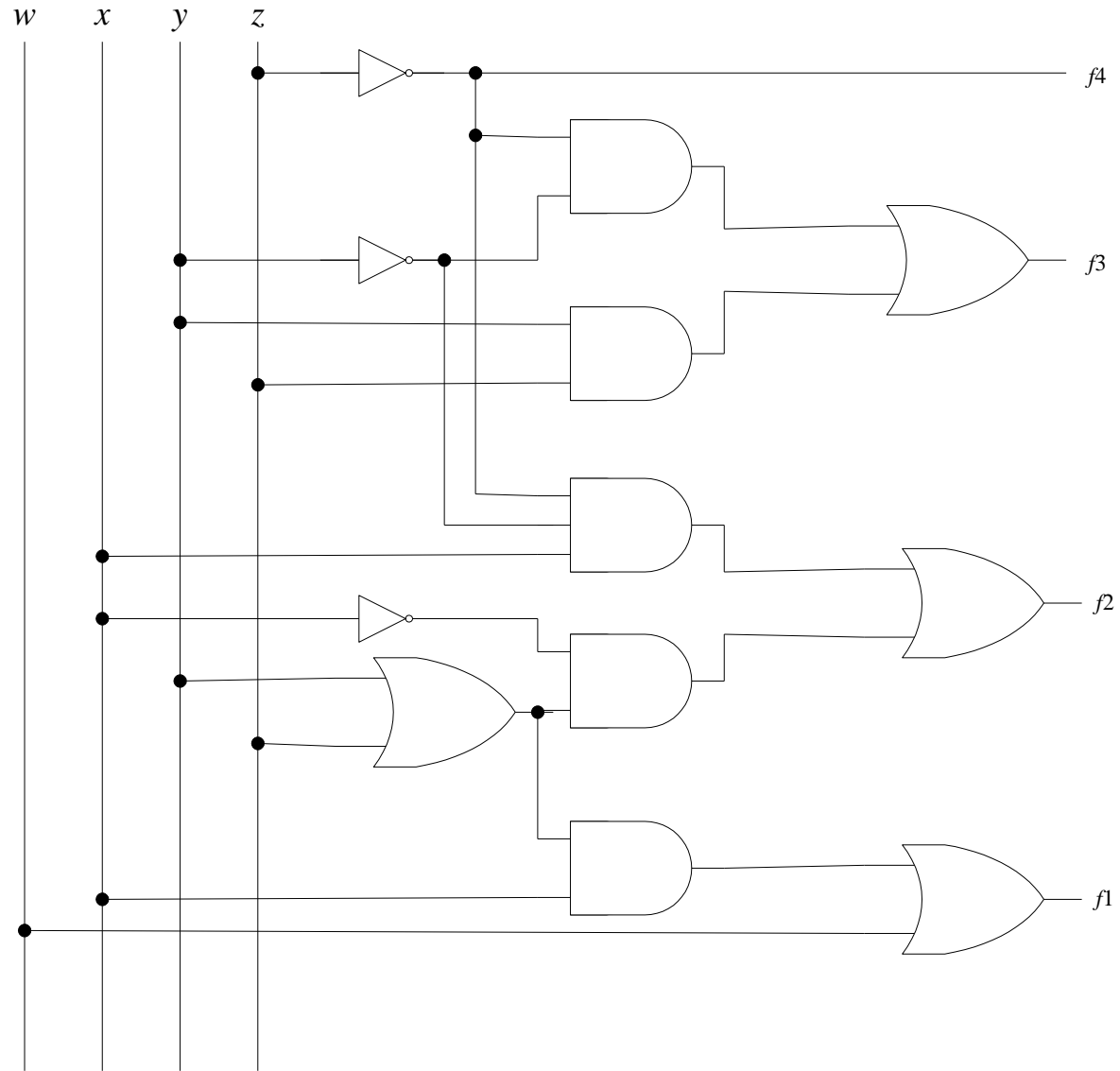
		yz			
		00	01	11	10
wx	00	1		1	
	01	1		1	
	11	X	X	X	X
	10	1		X	X

$$f_3(w, x, y, z) = y'z' + yz$$

(d) $f_4(w, x, y, z)$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	1			1
	01	1			1
	11	X	X	X	X
	10	1		X	X

$$f_4(w, x, y, z) = z'$$



Contoh 7.43

Minimisasi fungsi Boolean berikut (hasil penyederhanaan dalam bentuk baku SOP dan bentuk baku POS):

$$f(w, x, y, z) = \Sigma (1, 3, 7, 11, 15)$$

dengan kondisi *don't care* adalah $d(w, x, y, z) = \Sigma (0, 2, 5)$

Penyelesaian:

Peta Karnaugh dari fungsi tersebut adalah:

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	X	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

Hasil penyederhanaan dalam bentuk SOP

$$f(w, x, y, z) = yz + w'z \quad (\text{SOP}) \quad (\text{garis penuh})$$

dan bentuk baku POS adalah

$$f(w, x, y, z) = z (w' + y) \quad (\text{POS}) \quad (\text{garis putus2})$$

Metode Quine-McCluskey

- Metode Peat Karnaugh tidak mangkus untuk jumlah peubah > 6 (ukuran peta semakin besar).
- Metode peta Karnaugh lebih sulit diprogram dengan komputer karena diperlukan pengamatan visual untuk mengidentifikasi *minterm-minterm* yang akan dikelompokkan.
- Metode alternatif adalah metode Quine-McCluskey . Metode ini mudah diprogram.

Contoh 7.46

Sederhanakan fungsi Boolean $f(w, x, y, z) = \Sigma (0, 1, 2, 8, 10, 11, 14, 15)$.

Penyelesaian:

(i) Langkah 1 sampai 5:

(a)		(b)		(c)	
<i>term</i>	<i>w x y z</i>	<i>term</i>	<i>w x y z</i>	<i>term</i>	<i>w x y z</i>
0	0 0 0 0 \checkmark	0,1	0 0 0 -	0,2,8,10	- 0 - 0
1	0 0 0 1 \checkmark	0,2	0 0 - 0 \checkmark	0,8,2,10	- 0 - 0
2	0 0 1 0 \checkmark	0,8	- 0 0 0 \checkmark		
8	1 0 0 0 \checkmark	2,10	- 0 1 0 \checkmark	10,11,14,15	1 - 1 -
10	1 0 1 0 \checkmark	8,10	1 0 - 0 \checkmark	10,14,11,15	1 - 1 -
11	1 0 1 1 \checkmark	10,11	1 0 1 - \checkmark		
14	1 1 1 0 \checkmark	10,14	1 - 1 0 \checkmark		
15	1 1 1 1 \checkmark	11,15	1 - 1 1 \checkmark		
		14,15	1 1 1 - \checkmark		

(i) Langkah 6 dan 7:

		<i>minterm</i>							
Bentuk prima		0	1	2	8	10	11	14	15
√	0,1	×	×						
√	0,2,8,10	×		×	×	×			
√	10,11,14,15					×	×	×	×
			*	*	*		*	*	*
		√	√	√	√	√	√	√	√

Bentuk prima yang terpilih adalah:

- 0,1 yang bersesuaian dengan *term* $w'x'y$
- 0, 2, 8, 10 yang bersesuaian dengan *term* $x'z'$
- 10, 11, 14, 15 yang bersesuaian dengan *term* wy

Semua bentuk prima di atas sudah mencakup semua *minterm* dari fungsi Boolean semula. Dengan demikian, fungsi Boolean hasil penyederhanaan adalah $f(w, x, y, z) = w'x'y' + x'z' + wy$.

Contoh 7.47

Sederhanakan fungsi Boolean $f(w, x, y, z) = \Sigma (1,4,6,7,8,9,10,11,15)$

Penyelesaian:

(i) Langkah 1 sampai 5:

(a)		(b)		(c)	
<i>term</i>	<i>w x y z</i>	<i>term</i>	<i>w x y z</i>	<i>term</i>	<i>w x y z</i>
1	0 0 0 1 \checkmark	1,9	- 0 0 1	8,9,10,11	1 0 - -
4	0 1 0 0 \checkmark	4,6	0 1 - 0	8,10,9,11	1 0 - -
8	1 0 0 0 \checkmark	8,9	1 0 0 - \checkmark		
		8,10	1 0 - 0 \checkmark		
6	0 1 1 0 \checkmark				
9	1 0 0 1 \checkmark	6,7	0 1 1 -		
10	1 0 1 0 \checkmark	9,11	1 0 - 1 \checkmark		
		10,11	1 0 1 - \checkmark		
7	0 1 1 1 \checkmark				
11	1 0 1 1 \checkmark	7,15	- 1 1 1		
15	1 1 1 1 \checkmark	11,15	1 - 1 1		

(i) Langkah 6 dan 7

		<i>minterm</i>								
Bentuk prima		1	4	6	7	8	9	10	11	15
√	1,9	×					×			
√	4,6		×	×						
	6,7			×	×					
	7,15				×					×
	11,15								×	×
√	8,9,10,11					×	×	×	×	
		*	*			*		*		
		√	√	√		√	√	√	√	

Sampai tahap ini, masih ada dua *minterm* yang belum tercakup dalam bentuk prima terpilih, yaitu 7 dan 15. Bentuk prima yang tersisa (tidak terpilih) adalah (6,7), (7,15), dan (11, 15). Dari ketiga kandidat ini, kita pilih bentuk prima (7,15) karena bentuk prima ini mencakup *minterm* 7 dan 15 sekaligus.

Bentuk prima	<i>minterm</i>								
	1	4	6	7	8	9	10	11	15
√ 1,9	×					×			
√ 4,6		×	×						
√ 6,7			×	×					
√ 7,15				×					×
√ 11,15								×	×
√ 8,9,10,11					×	×	×	×	
	*	*			*		*		
	√	√	√	√	√	√	√	√	√

Sekarang, semua *minterm* sudah tercakup dalam bentuk prima terpilih. Bentuk prima yang terpilih adalah:

1,9	yang bersesuaian dengan <i>term</i>	$x'y'z$
4,6	yang bersesuaian dengan <i>term</i>	$w'xz'$
7,15	yang bersesuaian dengan <i>term</i>	xyz
8,9,10,11	yang bersesuaian dengan <i>term</i>	wx'

Dengan demikian, fungsi Boolean hasil penyederhanaan adalah $f(w, x, y, z) = x'y'z + w'xz' + xyz + wx'$.

Latihan :

a	b	a+b	a.B	(a+b)'	(a.b)'	(a+b).(a.b)	(a+b)+(a.b)
0	0						
0	1						
1	0						
1	1						

(a+b)' . (a.b)'	(a+b)' + (a.b)'	((a+b)' . (a.b)')'

Referensi

1. Soepono Soeparlan, 1995, Pengantar Organisasi Sistem Komputer, Diktat Gunadarma.
2. Roger L Tokheim, Prinsip-prinsip Digital, seri Buku Schaum